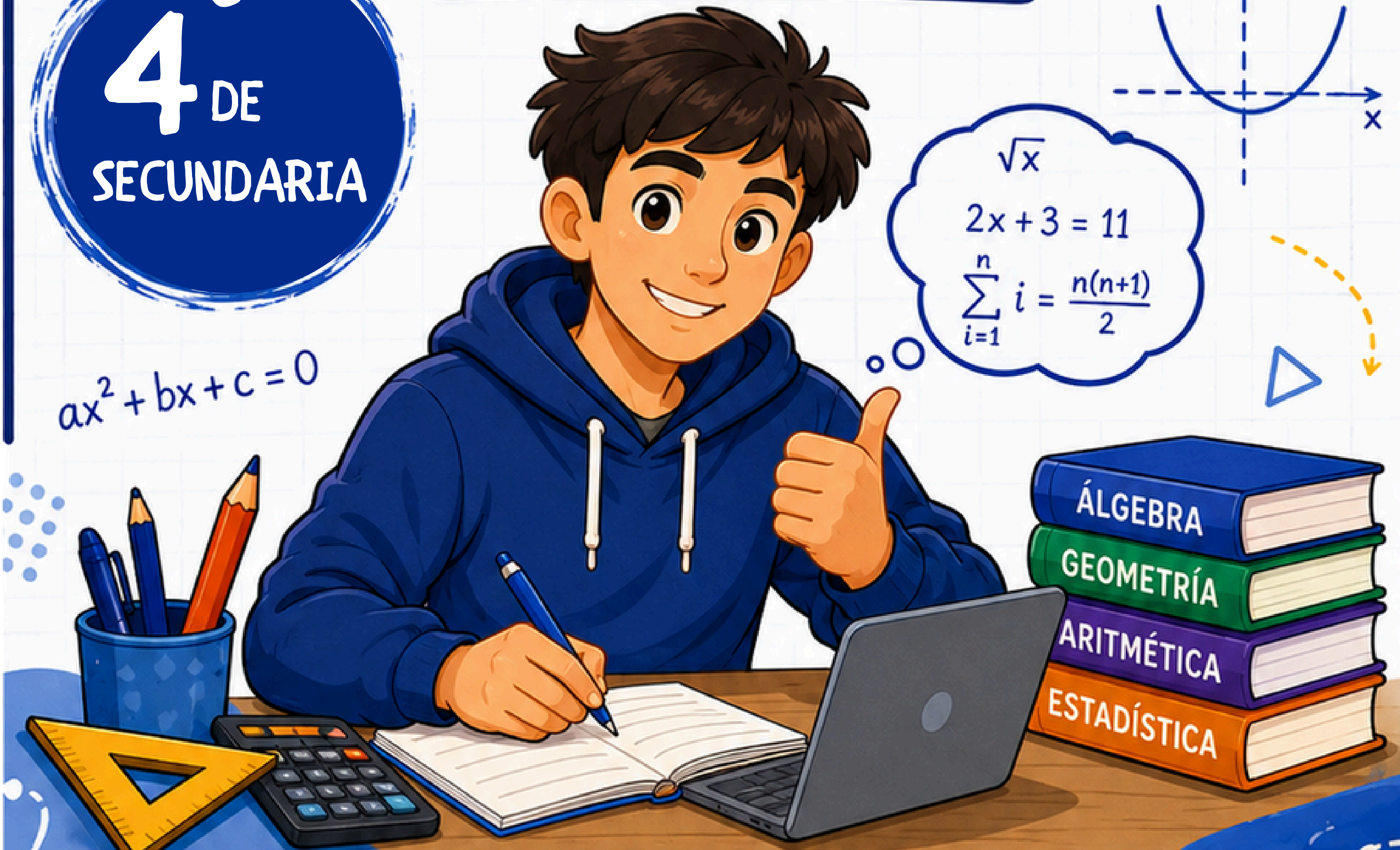
INSTITUCIÓN EDUCATIVA PRIVADA
Agua Viva
¡Preparando para triunfar!
TRUJILLO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PRIVADA
AGUA VIVA

MATEMÁTICA

II BIMESTRE

4° DE SECUNDARIA



ALUMNO(A):

MAGNITUDES PROPORCIONALES

APLICACIÓN

La variación proporcional tienen gran aplicación en situaciones cotidianas por atar algunos ejemplos: Cuando se prepara un pastel, es necesario que todos sus ingredientes guarden una proporción esto es, la leche con la harina y los huevos; al preparar mezclas de materiales para la construcción de un cuarto se debe guardar una proporción entre la arena, la grava, el cemento y la cantidad de agua necesaria.

☑ CONCEPTO BÁSICOS

1. MAGNITUD

Es todo aquello que puede ser medido; ejemplo: el área de un terreno, la edad de una persona, etc.

2. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Dos magnitudes serán proporcionales si son dependientes entre sí, es decir, si una de ellas varía, la otra también varía.

3. CLASES DE MAGNITUDES

A) Magnitudes Directamente Proporcionales (DP)

También denominadas simplemente proporcionales. Las magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales (D.P.), cuando el cociente entre sus valores correspondientes es una constante.

Es decir:

$$\boxed{A \text{ D.P. } B \leftrightarrow \frac{A}{B} = k \text{ (constante)}}$$

o también

$$\boxed{A = BK}$$

Se denota: $A \alpha B$

Si una magnitud se duplica, triplica, cuadruplica, etc. la otra magnitud lo realiza en la misma relación.

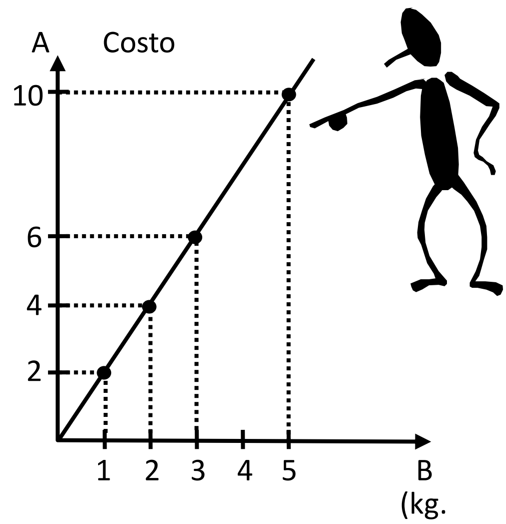
Ejemplo:

Sean las magnitudes "costo" del kg. de arroz y "cantidad" de arroz.

Magnitudes	Valores correspondientes				
Costo	2	4	6	10	…
Kgs. arroz	1	2	3	5	…

Del cuadro, observamos que si dividimos el costo entre el número de kgs. de arroz se obtiene una cantidad constante.

Gráficamente:



Está gráfica nos indica que a medida que "B" (Nº de Kgs. de arroz) aumenta; también "A" costo aumenta, o si "B" disminuye también "A" disminuye.

B) MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (I.P.)

Dos magnitudes "A" y "B" son inversamente proporcionales cuando el producto entre sus valores correspondientes es una constante.

Es decir:

$$\boxed{A \text{ IP } B \leftrightarrow A.\,B = k \text{ (constante)}}$$

o también: $\boxed{A = \frac{k}{B}}$

Se denota: $A \;\frac{1}{\alpha}\; B$

Esto significa que al duplicarse "A", "B" se reduce a su mitad, si "A" se cuadruplica "B" si reduce a la cuarta parte, etc.

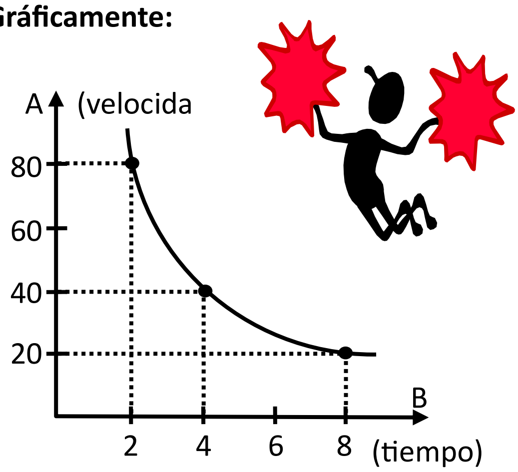
Ejemplo:
Un móvil al recorrer un tramo con una velocidad de 20 km/h se demoro 8 horas, si duplica su velocidad, entonces se demorará: Como duplica su velocidad se demorará menos tiempo en recorrer el mismo tramo específicamente la mitad del tiempo; es decir $\frac{8}{2}$ horas = 4 horas.

Observamos:

Magnitudes	**Valores correspondientes**			
Velocidad	20	40	80	...
Tiempo	8	4	2	...

Del cuadro, observamos que si multiplicamos la velocidad por el tiempo se obtienen siempre, para este cuadro, 160 una cantidad constante.

Gráficamente:



4. PROPIEDADES

A) Si A D.P. B, A D.P. C $\Rightarrow \frac{A}{B\,.\,C} = K$

B) Si A D.P. B, A I.P. C, A D.P. D $\Rightarrow \frac{A\,.\,C}{B\,.\,D} = K$

Ejercicios de Aplicación

1. Sabiendo que A es IP $\sqrt{B}$ si cuando B aumenta en su triple A varía en 30 unidades. Dar el valor de A.

a) 20 b) 40 c) 60
d) 80 e) 100

2. Se sabe que A es D.P. a B^2, ¿En cuántas veces aumenta "A" cuando B aumenta en su triple?

a) 6 b) 15 c) 3
d) 9 e) 8

3. Se tienen dos magnitudes A y B tales que A es D.P. a B^2; si cuando B aumenta en 2 unidades, el valor de A se cuadruplica, ¿Qué sucede con el valor de A si B aumenta en 4 unidades?
a) Se multiplica por 6
b) Se multiplica por 8
c) Se multiplica por 9

d) Se divide entre 6
e) Se divide entre 4

4. El gasto del profesor "Tulio" es D.P. a su sueldo, siendo el resto ahorrado si su sueldo equivale a S/. 900 ahorra S/. 90. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea de S/. 1,260?

a) 1400 b) 1134 c) 1500
d) 1600 e) 1300

5. Si A es D.P. a la suma de B y C es I.P. al cuadrado de D. Si cuando A = 2, B = 3, D = 6 entonces C = 5. Hallar "C" cuando A = 9, B = 10, D = 4.

a) 10 b) 12 c) 9
d) 8 e) 6

6. Se sabe que A^2 y B son I.P. y cuando A toma el valor de 20 A es a B como 10 es a 9. ¿Qué valor teoría A cuando B es 72?

a) 100 b) 5 c) 10
d) 20 e) 80

7. La magnitud "A" es directa al cuadrado de "B" e inversa a la raíz cuadrada de la suma de "C" y "D" cuando A = 5, B = 3, C = 6 y D = 10. ¿Qué valor toma "A" cuando B = 15, C = 9 y D = 16?

a) 20 b) 50 c) 80
d) 30 e) 100

8. Si "A" varía D.P. a "B" y cuando A = 800, B = 250. Hallar "A" cuando B = 75.

a) 240 b) 150 c) 160
d) 260 e) 280

9. "P" varía D.P. a "Q" e I.P. a "R"; cuando Q = 240 y R = 600 entonces P = 30. Hallar "P" cuando Q = 500 y R = 150.

a) 750 b) 250 c) 300
d) 450 e) N.A.

10. Si "M" varía I.P. a "P" y además cuando M = 600; P = 22. Hallar "P" cuando M = 440.

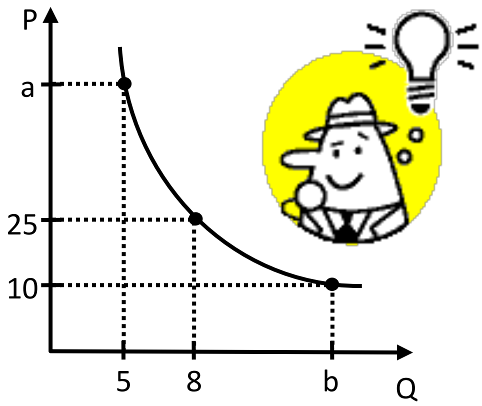
a) 25 b) 27 c) 36
d) 30 e) 45

11. A es D.P. a $\sqrt{B}$ e I.P. a C^3 si A = 3 cuando B = 256 y C = 2. Hallar "B" cuando A = 24 y C = 1/2.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

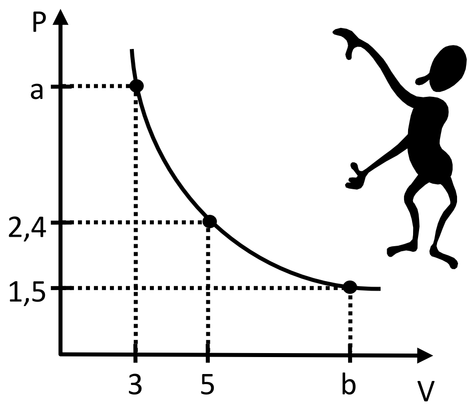
12. Si la siguiente gráfica muestra dos magnitudes inversamente proporcionales. Hallar "a + b"

a) 30
b) 36
c) 40
d) 48
e) 60



Si la siguiente gráfica representa dos magnitudes inversamente proporcionales. Hallar "a + b"

a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 18



13. Se sabe que "P" varía D.P. al cubo de "R" e I.P. a la raíz cuadrada de "T", ¿Cuál expresión representa la relación correcta entre las tres magnitudes?

(K = constante de proporcionalidad)

a) $\frac{P}{R\sqrt{T}} = K$ d) $\frac{P\sqrt{T}}{R^3} = K$

b) $\frac{P}{R\sqrt[3]{T}} = K$ e) $\frac{P\sqrt{T}}{R} = K$

c) $\frac{P\sqrt{T}}{R^2} = K$

14. Si "A" es directamente proporcional a la raíz cuadrada de "B" completar el siguiente cuadro y dar la suma de los valores obtenidos.

A	240	160	
B	81		225

a) 138 b) 436 c) 283
d) 428 e) 346

Tarea Domiciliaria

1. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante cuesta $ 800. ¿Cuánto costará otro diamante que pesa al doble del anterior?

a) $ 1600 b) 2400 c) 3000
d) 3200 e) 4000

2. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 80 gramos cuesta $ 320. ¿Cuánto costará otro diamante de 100 grs. de peso?

a) $ 4000 b) 4500 c) 5000
d) 8000 e) 10 000

3. Se sabe que "M" varía D.P. al cuadrado de "R" e I.P. al cubo de "S". ¿Cuál expresión representa la relación entre las tres magnitudes?
(K = constante de proporcionalidad)

a) $\frac{M}{K^2S} = K$ d) $\frac{MS^3}{R^2} = K$

b) $\frac{M}{K^2S^3} = K$ e) $MS^2 = R^3K$

c) $\frac{MR^2}{S^3} = K$

4. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 200 grs. cuesta $ 640. ¿Cuánto costará otro diamante que pesa 250 grs.?

a) $ 1200 b) 1000 c) 1500
d) 2000 e) 800

5. Si las magnitudes "P" y "Q" son inversamente proporcionales. Hallar "a + b"

P	4	b	12
Q	a	10	5

a) 25 b) 21 c) 32
d) 31 e) 41

6. Si la magnitud "F" es D.P. al cubo de "T". Completar el siguiente cuadro y dar "m + p"

F	m	625	40
T	4	p	2

a) 325 b) 165 c) 185
d) 145 e) 75

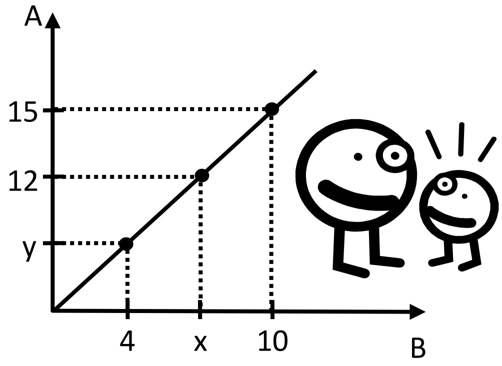
7. La presión de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta si a la temperatura de 300 K la presión es de 2 atmósfera. ¿A qué temperatura la presión es de 2,5 atmósferas?

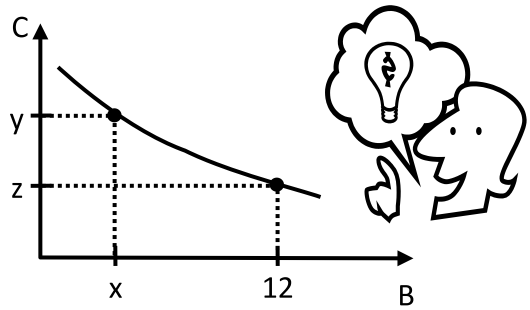
a) 375 K b) 350 c) 400
d) 360 e) 450

8. Según la ley de "Boyle", la presión de un gas es I.P. al volumen que ocupa. ¿A qué presión está sometida un gas, si al aumentar esta presión en 2,5 atmósfera; el volumen varía en un 20%?

a) 12 atm. b) 10 c) 8
d) 6 e) 5

9. Si A es D.P. a B y C es I.P. a D. Se tienen los siguientes grafías.





Hallar: "x + y + z"
a) 12 b) 16 c) 18
d) 20 e) 24

10. Se tiene 2 magnitudes A y B. Se sabe que A es I.P. a B^2. Hallar el valor de A sabiendo que se disminuye en 36 unidades el valor de B varía en 1/4 de su valor.

a) 40 b) 60 c) 80
d) 100 e) 200

11. Se sabe que A es D.P. a $\sqrt{B}$ e I.P. a C^2. Si A = 3 cuando B = 6 y C = 8. Hallar B cuando A = 6 y C = 4.

a) 4 b) 9 c) 16
d) 36 e) 64

12. Si A es directamente proporcional a B y C^2 e inversamente proporcional a D y E cuando A = 2B, D = 4, C = 2 entonces E = 3. Calcular E cuando A = 72, D = 6, B = 2 y C = 3E

a) 1 b) 2 c) 4
d) 8 e) N.A.

13. Se vende una joya en determinadas condiciones de proporcionalidad, para un peso de 13 gramos su valor es $ 845 y para un peso de 17 gramos su valor es $ 1445. Calcular el precio para un peso de 40 grs.

a) $ 1400 b) 8000 c) 7200
d) 9000 e) 3200

14. La diferencia de A y B es D.P. a C^2 e I.P. a D. Cuando A es el triple de B y C = 2 entonces D = 8. ¿Cuál será el valor de D cuando A sea el doble de B y C valga 3?

a) 27 b) 18 c) 36
d) 45 e) 54

15. El precio de un televisor a color varía en forma D.P. al cuadrado de su tamaño e I.P. a la raíz cuadrada de la energía que consume. Si cuando su tamaño es de 14 pulg. y consume "E" de energía su precio es de S/. 360. ¿Cuántos costará un televisor cuyo tamaño es de 21 pulgadas y consume E/4 de energía?

a) 1240 b) 950 c) 1620

d) 3600 e) N.A.

REPARTO PROPORCIONAL

☑ REPARTO PROPORCIONAL SIMPLE

Es un procedimiento aritmético que consiste en descomponer una cantidad en varias partes que son directamente o inversamente proporcionales a dichos números llamados convenientemente índices.

1. Reparto Simple

a) Reparto Simple Directo.- En este caso las partes son directamente proporcionales.

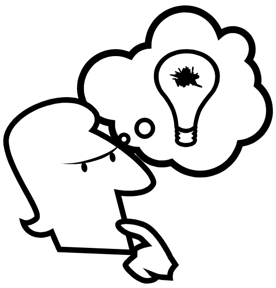
Ejemplo:

Repartir 600 en partes D.P. a los números 2, 3 y 7 dar la mayor parte.

Sol:

D.P. *Partes*

$$600\begin{cases}2 & \Rightarrow a = 2k\\ 3 & \Rightarrow b = 3k\\ 7 & \Rightarrow c = 7k\end{cases}$$



donde: $K = \dfrac{600}{2+3+7} = 50$

$\therefore$ a = 100
b = 150
c = 350

Rpta.: $\boxed{c = 350}$

b) Reparto Simple Inverso.- En este caso las partes son inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Repartir S/. 1 800 en forma I.P. a los números 3, 4 y 6 dar la parte intermedia.

Sol:

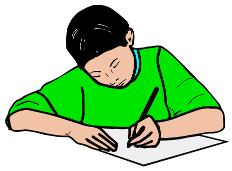
I.P. **< >** *D.P.* *Partes*

$$1\,800\begin{cases}3 & \frac{1}{3}\times 12 = 4 \Rightarrow & a = 4k\\ 4 & \frac{1}{4}\times 12 = 3 \Rightarrow & b = 3k\\ 6 & \frac{1}{6}\times 12 = 2 \Rightarrow & c = 2k\end{cases}$$

donde: $k = \dfrac{1800}{4+3+2} = 200$

$\therefore$ a = 800
b = 600
c = 400

Rpta.: $\boxed{b = 600}$



Ejercicios de Aplicación

1. **a)** Repartir 1 800 en partes D.P. a los números 2,
3 y 4 dar la menor parte.

a) 400 b) 200 c) 300
d) 800 e) N.A.

b) Se reparte 738 en forma D.P. a dos cantidades de modo que ellas están en la relación de 32 a 9. Hallar la cantidad mayor.

a) 576 b) 162 c) 274
d) 252 e) 700

2. **a)** Dividir el número 410 en partes I.P. a: 2/3; 6;
11/9. Hallar la parte mayor.

a) 275 b) 205 c) 135
d) 247,5 e) 257,5

b) Repartir S/. 4950 en forma I.P. a 12; 18 y 6;
indicar la mayor parte.

a) 300 b) 450 c) 900
d) 1350 e) 2700

3. **a)** Dividir 400 directamente proporcional a $\sqrt{12}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{147}$ y $\sqrt{363}$.
Dar como respuesta la suma de las 2 menores partes.

a) 288 b) 108 c) 112
d) 280 e) 110

b) Un padre de familia reparte semanalmente una propina de S/. 148 entre sus hijos que tienen respectivamente: 12, 15 y 18 años, con la condición de que se dividan esta suma I.P. a la edad que tienen una de las partes es:

a) 80 b) 36 c) 64
d) 44 e) 48

4. **a)** Repartir S/. 2712 entre 3 personas de modo
que la parte de la primera sea a la de la segunda como 8 es a 5 y que la parte de la segunda a la tercera como 6 es a 7. La diferencia entre la mayor y menor de las partes es:

a) 384 b) 408 c) 480
d) 432 e) 456

b) Dividir 3 024 directamente proporcional a 3 números de manera que el primero sea al segundo como 3 a 4 y el segundo con el tercero en la relación de 5 a 7. Dar como respuesta la mayor cantidad.

a) 1 540 b) 1 344
c) 960
d) 780 e) 720

5. **a)** Una viuda debía repartirse la herencia de
$ 13400 que le dejó a su esposo, con el bebé que esperaba. Si nacía niño, la madre y el hijo se repartían la herencia proporcionalmente a 4 y 7 respectivamente. Si nacía niña, la madre y su hija se repartían proporcionalmente a 5 y 3 respectivamente. Al fin y al cabo, nacieron mellizos: un niño y una niña. ¿Cuánto recibió la niña?

a) $ 4000 b) 7000 c) 2600
d) 2400 e) 3500

b) Repartir S/. 42 entre “A” y “B” y “C” de modo que la parte de “A” sea el doble de “B”, y la de “C” la suma de las partes de “A” y “B”. Dar la parte mayor.

a) S/. 21 b) 7 c) 14
d) 35 e) 20

6. **a)** Cuatro personas invirtieron en su negocio
cantidades proporcionales a 11, 15, 18 y 25. Si el que aportó más aportó 2800 soles más que el que aportó menos. ¿Cuánto aportaron los cuatro?

a) 20 700 b) 13 800 c) 15 800
d) 11 800 e) 17 700

b) 3 amigos se reúnen para un negocio, contribuyendo con cantidades proporcionales a 17, 13 y 10. Si el mayor aportó 600 más que el segundo. ¿Cuánto aportaron entre todos?

a) 6000 b) 4000
c) 4500
d) 5400 e) 8100

7. **a)** Cinco niños "A", "B", "C", "D", "E" llevaban 11;
12; 13; 14; 15; naranjas respectivamente, se encuentran con el padre de "E", comen todos en partes iguales las naranjas y el padre les da un pago de lo que comió de 195 soles. ¿Cuánto recibió "C"?

a) S/. 30 b) 21 c) 39
d) 57 e) 75

b) Se tiene 4 alfombras de forma cuadrada cuyos lados son proporcionales a: 2; 3; 5 y 6 respectivamente, a los cuales se les va a lavar. Si por la primera se pagó S/. 4 200 menos que por la tercera. ¿Cuánto se pagó por todas al ser lavadas?

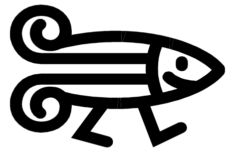
a) S/. 500 b) 1 400 c) 14 800
d) 2 500 e) 5 600

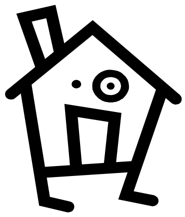
8. **a)** Ricardo tiene 3 sobrinos de 15, 17 y 19 años
respectivamente y les deja S/. 24 000 con la condición de que se dividen esta suma D.P. a las edades que tendrán dentro de 3 años. Una de las partes será:

a) 6400 b) 5600
c) 8800
d) 9600 e) 10 400

b) Se reparte una herencia de $ 19 270 entre 3 hermanos en razón inversa a sus edades, que es la del primero: 30 años, la del segundo, 40 y la edad del tercero: 50. ¿Cuánto más corresponde al menor que al intermedio?

a) 2380 b) 3280
c) 283
d) 382 e) 2050





Tarea Domiciliaria

1. Repartir 6 000 en forma I.P. a los números 2, 3 y 6 dar la parte intermedia.

a) 2000 b) 450 c) 750
d) 900 e) 1200

2. Repartir S/. 1600 D.P. a 1, 4, 5 y 6. Dar como respuesta la parte mayor.

a) 500 b) 600 c) 700
d) 604 e) 720

3. Repartir 5800 en forma I.P. a los números 4, 5 y 1; e indicar la parte menor.

a) 1000 b) 800 c) 4000
d) 6000 e) 400

4. Repartir 36 en partes proporcionales a $\sqrt{28}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{343}$ y dar como respuesta la mayor de las partes.

a) 15 b) 18 c) 6
d) 9 e) 21

5. Dividir 156 en tres partes de modo que la primera sea a la segunda como 5 es a 4 y la primera sea a la tercera como 7 es a 3. La segunda es:

a) 41 b) 30 c) 70
d) 56 e) N.A.

6. Repartir S/. 3936 entre 3 personas de modo que la parte de la primera sea la segunda como 7 es a 6 y que la parte de la segunda sea a la tercera como 4 es a 5. La parte intermedia es:

a) 1344 b) 1152 c) 1536
d) 1056 e) 1440

7. 3 socios se reúnen para un negocio, contribuyendo con capitales proporcionales a 13, 15 y 18. Si el mayor aportó 300 más que el segundo. ¿Cuánto aportaron entre todos?

a) 1 500 b) 2 000 c) 1 800
d) 2 000 e) 4 600

8. Dos pastores llevan 5 y 3 panes respectivamente; se encuentran con un cazador hambriento, y comparten con este los 8 panes en partes iguales. Si el cazador pagó S/. 48 por su parte. ¿Cuánto corresponde a cada pastor?

a) S/. 42 ; S/. 6 b) 41 ; 7 c) 45 ; 3
d) 40 ; 8 e) 39 ; 18

☑ REPARTO PROPORCIONAL COMPUESTO

Es cuando las partes son proporcionales a varios grupos de índices.

Ejemplo:
Reparto S/. 7 000 D.P. a 12 y 24 y a la vez D.P. a 1/3 y 1/8. Indicar la parte menor.
Sol:

$$\begin{array}{cccccc} & \underline{D.P.} & \underline{D.P.} & & \underline{Índices} & & \underline{Partes} \\ 7\,000 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} 12 \\ 24 \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} \end{array} & \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} a = 4k \\ b = 3k \end{array} \end{array}$$

donde $k = \frac{7000}{7} = 1\,000$

$\therefore$ a = 4000
b = 3000

Rpta.: $\boxed{b = 3000}$

Ejercicios de Aplicación

9. **a)** Al repartir una cantidad en forma I.P. a 1 y 2 a
la vez. También I.P. a 1/6 y 1 se obtuvo que la parte menor fue S/. 7200, ¿Cuál fue la cantidad repartida?

a) 96 300 b) 93 600 c) 94 600
d) 96 200 e) 93 060

b) Se reparte una cantidad en forma D.P. a 7 y 12 y a la vez I.P. a 10 y 15; además se obtuvo que la parte menor resultó ser S/. 5600. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

a) 15 000 b) 12 000 c) 18 000
d) 9 000 e) 64 000

10. **a)** Al repartir una cantidad de dinero en forma
I.P. a 2, 3 y 4 y a la vez D.P. a 7; 3 y 9 se obtuvo que la parte intermedia resultó ser S/. 8190. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

a) 27 450 b) 25 470 c) 24 570
d) 27 405 e) 24 500

b) Repartir S/. 390 en forma D.P. a 8 y 16 y a la vez I.P. a 2 y 1/3. Indicar la parte mayor.

a) 290 b) 30 c) 390
d) 130 e) 360

11. **a)** Al repartir una cantidad en forma D.P. a 36,
60 y 45 e I.P. a 16; 24 y 60. Se observo que la diferencia entre la mayor y menor de las partes es 5600. La suma de cifras de la cantidad repartida es:

a) 14 b) 15 c) 16
d) 17 e) 18

b) Se reparte una cantidad N directamente proporcional a 3, 5 y 2 e inversamente proporcional a 2, 3 y 5. Si la diferencia entre la cantidad mayor y la intermedia es 10. Hallar la cantidad menor.

a) 24 b) 100 c) 90
d) 80 e) N.A.

12. **a)** Repartir una cantidad N D.P. a 5, 7 y 9;
también D.P. a 3, 2 y 8 e I.P. a $\frac{45}{2}, \frac{7}{3}$ y $\frac{24}{5}$
.

Si la parte intermedia es igual a 360. Hallar N.

a) 1300 b) 1200
c) 1000
d) 800 e) N.A.

b) Repartir 594 D.P. a 2, 3 y 5; I.P. a 3, 2 y $\frac{5}{3}$ e I.P. a $\frac{5}{4}, \frac{6}{7}$ y $\frac{9}{8}$. Hallar cuanto le toca a la menor parte.

a) 160 b) 105 c) 64
d) 60 e) N.A.

13. **a)** Repartir una cantidad N I.P. a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e
D.P. a $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$. Sabiendo que la diferencia entre la parte mayor y la menor es 200. Hallar la diferencia de las otras dos partes.

a) 108 b) 250 c) 575
d) 472 e) N.A.

b) Repartir una cantidad N. I.P. a 2, 3 y 5. También D.P. a $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ y $\frac{4}{9}$ e I.P. a

$\frac{8}{20}, \frac{3}{21}$ y $\frac{2}{18}$. Si a la parte mayor le toca 150. Hallar cuanto le toca a la cantidad menor.

a) 45 b) 50 c) 40
d) 70 e) N.A.

14. a) Repartir N D.P. a 3, 5, 7 y 9 e I.P. a 2, 3, 5 y 6.
Si se sabe que la diferencia entre la mayor y menor parte es 40. Hallar la suma de las otras 2 partes.

a) 400 b) 450 c) 500
d) 600 e) N.A.

b) Repartir una cantidad N D.P. a 5, 7, 9, 11 e I.P. 3, 5, 7 y 9. Si la parte menor es igual a 385. Hallar la suma de cifras de la cantidad mayor.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) N.A.

15. a) Si una cantidad N se reparte D.P. a
$\frac{2}{13}, \frac{5}{11}$ y $\frac{7}{23}$ e I.P. a $\frac{4}{26}, \frac{10}{33}$ y $\frac{7}{46}$.

Si la menor parte es igual a 500. Hallar N.

a) 2250 b) 3575
c) 4218
d) 7415 e) N.A.

b) Repartir una cantidad N I.P. a $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$ y directamente proporcional a $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Si la cantidad intermedia es 140. Hallar N.

a) 4740 b) 2570
c) 3813
d) 7436 e) N.A.

Tarea Domiciliaria

9. Repartir 70 I.P. a 2, 3 e I.P. a 3 y 5. Hallar la parte menor.

a) 20 b) 50 c) 30
d) 40 e) N.A.

10. Repartir S/. 3100 I.P. a 2 y 18 y a la vez I.P. a 4 y 3. Dar como respuesta la mayor cifra de la parte mayor.

a) 2 b) 7 c) 5
d) 4 e) 9

11. Repartir S/. 7000 D.P. a 12 y 24 y a la vez D.P. a 1/3 y 1/8. Indicar la parte menor.

a) 6000 b) 2500 c) 4000
d) 3000 e) 500

12. Repartir una cantidad N D.P. a $\frac{15}{17}, \frac{4}{9}$ y también D.P. a $\frac{34}{15}, \frac{27}{8}$. Si la mayor parte es igual a 360. Hallar N.

a) 520 b) 720 c) 160
d) 845 e) N.A

13. Repartir 2500 I.P. a $\frac{11}{3}, \frac{8}{5}$ y $\frac{15}{7}$ e I.P. a $\frac{9}{44}, \frac{25}{40}$ y $\frac{21}{45}$. Hallar cuanto recibe al que le toca más.

a) 800 b) 1000 c) 1200
d) 1500 e) N.A.

14. Repartir una cantidad N I.P. a $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{1}{5}$ e D.P. a $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Si la diferencia entre las partes intermedias es 350. Hallar N.

a) 40 318 b) 43 209 c) 3 215
d) 21 315 e) 17 318

15. Se reparte una cantidad N D.P. a 2, 3, 4, 5 y 6 e I.P. a 3, 2, 5, 6 y 2 y a la vez D.P. a 5, 7, 2, 3 y 1. Si la parte menor es igual a 96. Hallar la parte mayor.

a) 630 b) 580 c) 218
d) 428 e) N.A.

FUNCIONES

PAR ORDENADO

Es un conjunto formado por dos elementos dispuestos en determinado orden:

(a; b)

Primera componente   Segunda componente

Propiedades:

1. (a; b) ≠ (b; a) (no conmutativa)

2. Si: (a; b) = (c; d) → a = c ∧ b = d

PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos "A" y "B" no vacíos; se llama producto cartesiano (A x B) al conjunto de pares ordenados (a; b) donde a ∈ A y b ∈ B; es decir:

A x B = {(a; b) / a ∈ A ∧ b ∈ B}

Propiedades:

1. A x B ≠ B x A

2. n(A x B) = n(A) x n(B)

RELACIÓN

Definición

Sean "A" y "B" dos conjuntos no vacíos; se llama relación de "A" en "B", a todo subconjunto "R" de "A x B" es decir:

"R" es una relación de "A" en "B" ↔ "A x B"

En particular, si: A = B, "R" se llama una relación de "A" (ó relación entre elementos de "A").

La definición anterior de relación exige la comparación de elementos por pares, por eso suele llamarse relaciones **"Binarias"**.

Ejemplos

En el conjunto:

A = {9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1}

establecemos las siguientes relaciones:

- "a" es el doble de "b".
- "a" es igual a "b".

Escribir los pares que cumplen las relaciones respectivamente.

Sea:

R_1 = {(a, b) / "a" es el doble de "b"}

R_1 = {(2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4)}

R_2 = {(a, b) / "a" es el doble a "b"}

R_2 = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (7; 7), (8; 8), (9; 9)}

- Si "R" es una relación entre elementos de "A" y "B", conjunto "A" se llama conjunto de partida de la relación y a "B" conjunto de llegada.

- Se llama dominio de una relación "R" al conjunto de todos los elementos (a ∈ A) tales que existe por lo menos un (b ∈ B) con (a, b) ∈ R.

- Se llama rango de una relación "R" al conjunto de todos los elementos (b ∈ B) tales que existe por lo menos un (a ∈ A) con (a, b) ∈ R.

Ejemplos

Sea la relación:

$R_1 = \{(1; 2), (2; b), (2; 7), (3; 2), (1; -2)\}$

$D_{R_1} = \{1; 2; 3\}$

$R_{R_1} = \{2; b; 7; -2\}$

FUNCIONES

Definición

Sean "A" y "B" dos conjuntos no vacíos (pudiendo ser A = B) llamaremos función definida en "A" a valores en "B" (función de "A" en "B" a toda relación:

$$f \subset A \times B$$

que tiene la propiedad: $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$

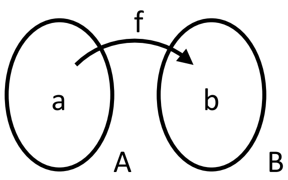
entonces: $b = c$

Es decir, una función "f" es un conjunto de pares ordenados de elementos, tal que **dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento**.

Notación

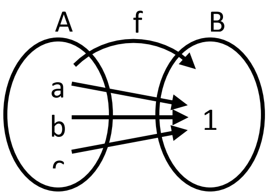
Si "f" es una función de "A" en "B" se designa por:

$f: A \rightarrow B$



Se lee "f" es una función de "A" en "B".

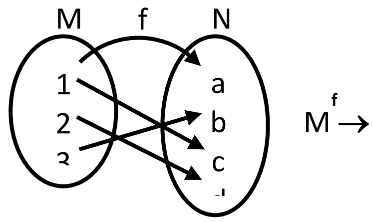
Ejemplos



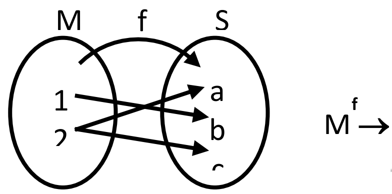
Siendo: $a \neq b \neq c$

diremos:

$f = \{(a; 1), (b; 1), (c; 1)\}$ es función.



$f = \{(1; c), (2; d), (3; b)\}$ es función.



$f = \{(1; b), (2; a), (3; c)\}$

- Si: $a \neq b \neq c$, luego no es función porque se repite el primer componente.
- Si: $a = c \neq b$, es función.

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo

Hallar los valores de "a" y "b" para que el conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(2; 5), (-1; -3), (2; 2a - b), (-1; b-a), (a + b^2; a)\}$$

sea una función.

Solución:

En una función 2 pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

$\therefore$ $(2; 5)$ y $(2; 2a - b) \in A \rightarrow 5 = 2a - b$ …………(1)

$(-1; -3)$ y $(-1; b - a) \in A \rightarrow b - a = -3$ …………(2)

De (1) y (2) resolviendo:

$$a = 2; b = -1$$

$\therefore$ f = {(2; 5), (-1; -3), (3; 2)}

* Si "f" es una función de "A" en "B" el conjunto "A" se llamará conjunto de partida de la función y "B" el conjunto de llegada.

* El dominio de una función "f", se designa por "D_f" y se define como el conjunto siguiente:

  $D_f = \{x \in A \,/\, \exists\, y;$ tal que $(x, y) \in f\}$

  Es decir son las primeras componentes de los pares ordenados.

* El rango (o imagen) de una función "f", se designa por "R_f" o "Im_f" y se define como el conjunto siguiente:

  $R_f = \{y \in B \,/\, \exists\, y;$ tal que $(x, y) \in f\}$

  Es decir son las segundas componentes de los pares ordenados.

* Si el par ordenado $(a; b) \in f$ escribiremos: $b = f_{(a)}$ y diremos que "b" es imagen de "a" por "f" (o también, que "b" es el valor de "f" en "a".

  $f = \{(a; b) \in A \times B \,/\, b = f_{(a)};\ a \in D_f\}$

Ejemplo

Sea la función:

f = {(2; 3), (3; 4), (7; 3), (-2; 6), (4; 1)}

Hallar: $M = f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(7)} + f_{(-2)} + f_{(4)}$

Solución:

Como:

$f_{(2)} = 3;\ f_{(3)} = 4;\ f_{(7)} = 3$

$f_{(-2)} = 6;\ f_{(4)} = 1$

$\therefore$ M = 17

REGLA DE CORRESPONDENCIA

Para que se pueda definir bien una función es suficiente conocer su dominio (D_f), y una regla que permita asignar para cualquier $x \in D_f$; su imagen $f_{(x)}$.

Ejemplo

Hallar el dominio en las siguientes funciones:

a. f = {(2; 3), (4; 5), (6; 3), (-2; a)}

D_f = {2; 4; 6; -2}

b. $f_{(x)} = \sqrt{x-2}$

$D_f = x - 2 \geq 0;\ x \geq 2 \qquad D_f = [2; +\infty>$

c. $f_{(x)} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}} + \dfrac{3}{x-3}$

$D_f = \dfrac{x-2}{x+5} \geq 0 \quad \wedge \quad x - 3 \neq 0$

Ejemplo

Hallar el rango de:

a. f = {(2; 3), (4; 5), (6; 3)}

R_f = {3, 5}

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. BLOQUE I

A) Hallar "ab", si el conjunto de pares ordenados representa una función.

$$F = \{(2; 3), (3; a - b), (2; a + b), (3; 1)\}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

B) De la función:

$$F = \{(2; 2a), (2; a^2), (a; b), (a + 2; b), (4; 4)\}$$

Hallar: "a + b"

a) 0 b) 2 c) 4
d) 6 e) Hay 2 correctas

C) De la función: $F = \{(2; 3), (3; 4), (4; 1)\}$

Calcular:

$$A = F_{(F_{(2)})} + F_{(F_{(3)})}$$

a) 1 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

D) Dado: $F = \{(0; 1), (1; 2), (2; 3)\}$

Hallar:

$$F_{(0)}^{F_{(1)}} + F_{(1)}^{F_{(2)}} + F_{(2)}^{F_{(0)}}$$

a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 16

E) De la función: $F_{(x)} = \begin{cases} 2 - x; & x \geq 0 \\ x + 3; & x < 0 \end{cases}$

Hallar: $F_{(F_{(3)})} + F_{(F_{(-2)})}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

F) Si: $f_{(x)} = 5x + 4$

Hallar: $f_{(3)}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 17 e) 19

G) Sea el costo de una tela en función de su medida "x" denotado por:

$$C_{(x)} = x + 1 \text{ (en soles)}$$

para 3 metros de tela cuanto debe invertir. (en soles)

a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

BLOQUE II

1. La tabla muestra los valores hallados para la función:

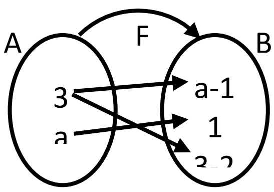
$F_{(x)} = ax^2 + b$;

x	1	0
F(x	8	5

Luego el producto de "a" y "b" es:

a) 15 b) 12 c) 20
d) 9 e) 21

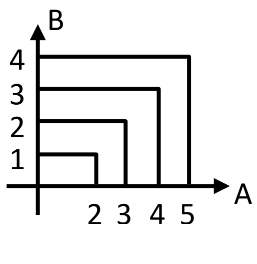
2. Dada la función F: A → B. Hallar la suma de elementos de:



a) 7
b) 5
c) 2
d) 1
e) -1

3. Dada la función: F: A → B
Hallar:

$$E = \frac{f(f_{(5)}) + f(f_{(4)})}{f_{(5)} + 1}$$



a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

4. Hallar: $f_{(3\pi)}$; si: $f_{(x)} = 5$

a) 1 b) 2π c) 3
d) 4π e) 5

BLOQUE III

1. Si: F = {(2; a + 3), (2; 2a - 1), (4; b + 3), (a; 3b-1)} es una función, calcular: a - b

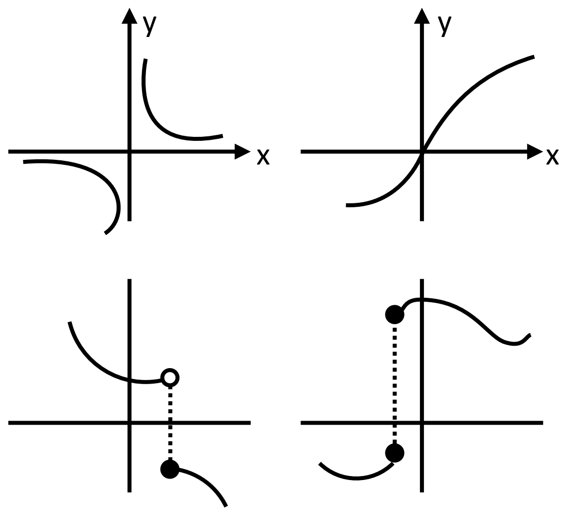
a) 4 b) 10 c) 6
d) 8 e) 2

2. Si: F = {(0; -4); (-2; 1); (5; 4); (2; 5); (4; 8)}
G = {(2; 4); (5; 3); (1; 2); (3; 3)}

Hallar: $E = \dfrac{f(g_{(1)}) \cdot g[f_{(2)}] - (f_{(0)})^3 + 2f_{(-2)}}{g_{(5)} \cdot f_{(5)} - 21}$

a) 8 b) 3 c) 19
d) 15 e) 27

3. Dadas las siguientes graficas cuántas son funciones:



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

4. ¿Qué conjunto de pares ordenados son funciones?

A = {(m + 10; m) / m ∈ R}

B = {(m^2 – 3; m) / m ∈ R}

C = {(m^2 + 4; m) / m ∈ R}

D = {(4n + 1; n) / n ∈ R}

a) Sólo A b) Sólo C c) B y D
d) A y D e) Todos

TAREA DOMICILIARIA

1. Dada la función: F = {(5; 4), (3; 2), (7; 8), (2; 5)}
Indicar: E = F(F(F(3)))

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Sea: E = {(5; 4), (1; 2), (3; 8), (7; b), (5;b)}
Hallar: “b”

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Sea la función F(x) = 3x + 10 Hallar: F(-5)

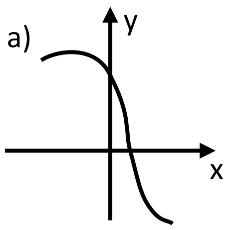
a) -5 b) -10 c) -20
d) -15 e) -1

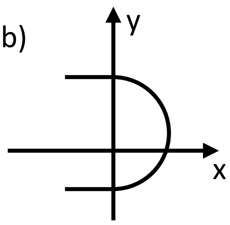
4. Sea la función: $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$

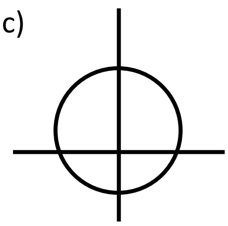
Hallar: F(2) . F(3) . F(4)

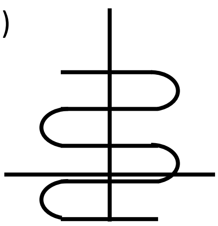
a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 30

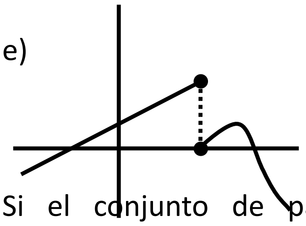
5. Cuál de las siguientes graficas representa una función:

a)


b)


c)


d)


e)


6. Si el conjunto de pares ordenados representa una función:

f = {(1; 1+b), (3; ab), (1; 7), (4; 6), (3; 6), (6; 2)}

Hallar el valor de a + b.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

7. Dadas las funciones:

P = {(4; 3), (3; 6), (2;7)}

M = {(1; 2), (2; 3), (3; -4)}

Calcular: $P[M_{(2)}] + M[P_{(4)}]$

a) 2 b) 4 c) 3
d) 5 e) 6

8. Sea la función definida por:

f = {(3; 9), (a-1; b), (3; 2a-1); (b; 2b-3); (9; b+1)}

Si: $f_{(f_{(f_{(4)})})} = b+1$

entonces el valor de “b” es:

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 3

9. Sea: f = {(3; 1), (1; 3), (2; 3), (3; 2)}, una función. Hallar: $f_{(1)} + f_{(2)}$

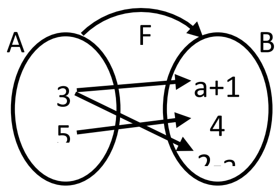
a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

10. Sea: F = {(3; 2), (5; 8), (3; b), (5; a)}, una función.

Hallar: $A = (F_{(3)} + F_{(5)}) + a + b$

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

11. Sea F: A $\rightarrow$ B, una función:



Hallar: "A"

a) 1 b) 2/3 c) 3/2
d) 1/3 e) 4/3

12. Hallar: $m^2 + 1$

Si: F = {(3; m), (5; n), (6; p), (3; 7)}

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e)50

DOMINIO, RANGO Y GRAFICA DE FUNCIONES

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Definición

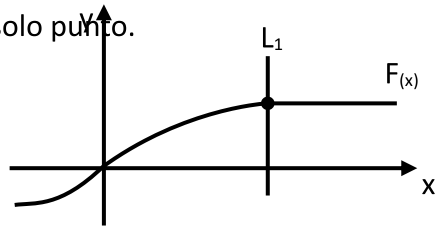
Sea "f" una función real, la gráfica de "f" es el conjunto "G", de todos los puntos (x, y) en el plano, tal que "x" está en el dominio de "f" e "y" es la imagen de "x" por "f", es decir:

$$G = \{(x, y) \in R^2 \,/\, y = f_{(x)};\ x \in D_f\}$$

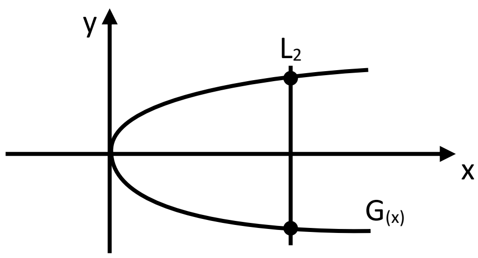
✷ Una gráfica cualquiera será función; si y sólo si, al azar una paralela al eje "y" corta a la gráfica en un solo punto.

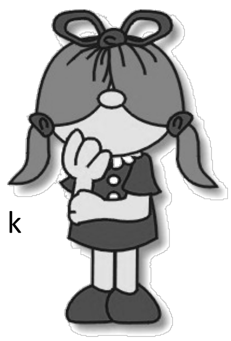
Ejemplo

a. $F_{(x)}$ es función entonces "L_1" la recta paralela al eje "y" corta a la gráfica en un solo punto.



b. $G_{(x)}$ no es función entonces "L_2" la recta paralela al eje "y" corta a la gráfica en más de un punto.





FUNCIONES ESPECIALES

1 Función Constante

Regla de correspondencia: $f_{(x)} = k$

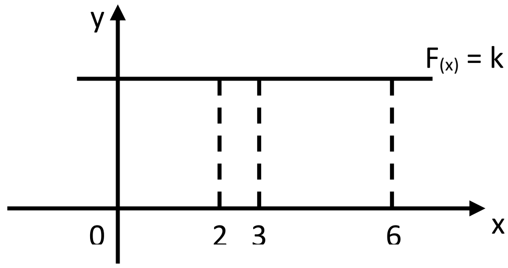
$$D_f = R \quad \wedge \quad R_f = k$$

Significa que:

$$f = \{\dots (0; k), (1; k), (2; k)\dots\}$$

$$\therefore\ f = \{(x; k) \,/\, f_{(x)} = k\}$$

Gráfica:



2 Función Identidad

Regla de correspondencia: $f_{(x)} = x$

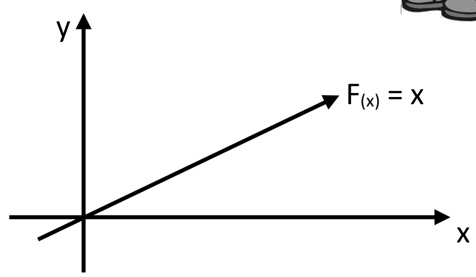
$$D_f = R \quad \wedge \quad R_f = R$$

Significa que:

$$f = \{\dots (1; 1), (2; 2), (3; 3),\dots\}$$

$$\therefore\ f_{(x)} = \{(x; y) \,/\, f_{(x)} = x \rightarrow x = y\}$$

Gráfica:



3 Función Valor Absoluto

Regla de correspondencia: $f_{(x)} = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x\ ;\ si: x \geq 0 \\ -x\ ;\ si: x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad \wedge \quad R_f = R^+ \cup \{0\}$$

Significa que:

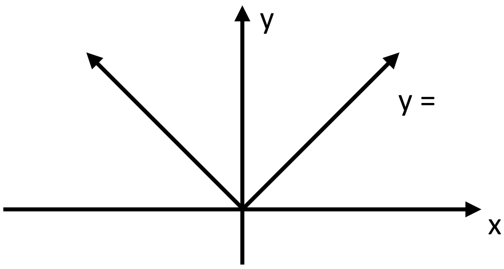
$$f = \{\dots(-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1),\dots\}$$

$$f_{(x)} = |x|$$

$y = |x| \rightarrow x = 1; y = 1$

$x = -1; y = 1$

Gráfica:



4 Función Raíz Cuadrada

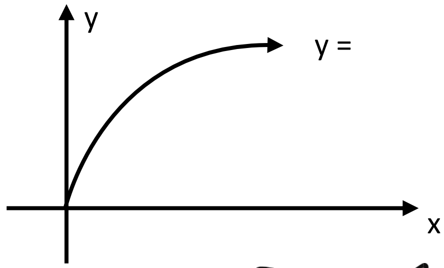
Regla de correspondencia: $f_{(x)} = \sqrt{x}$

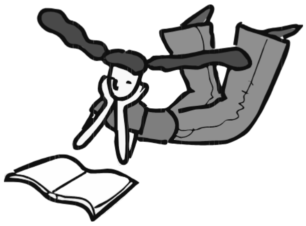
$D_f = R^+ \cup \{0\} \quad \wedge \quad R_f = R^+ \cup \{0\}$

Significa que:

$f = \{ (0; 0), (1; 1), (2; \sqrt{2}), (3; \sqrt{3}), \ldots\}$

Gráfica:



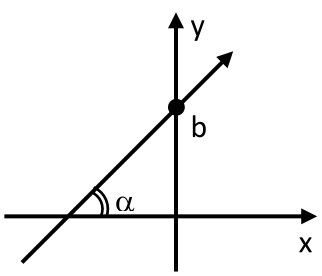


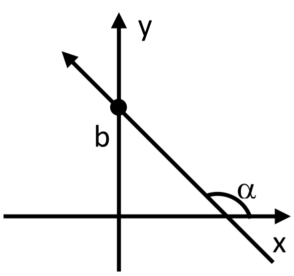
5 Función Lineal

Es una función con dominio en todos los reales y como regla de correspondencia: $f_{(x)} = ax + b$, donde "a" y "b" son constantes cualesquiera. ($a \neq 0$)

Su gráfica es una recta; con pendiente "a" e intercepto "b".

Gráfica:





$y = mx + b \qquad\qquad y = mx + b$

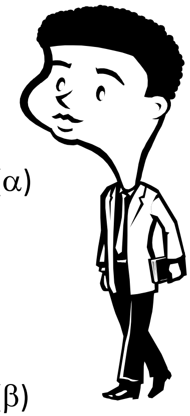
$m > 0 \qquad\qquad m < 0$

m: pendiente de la recta

$m = tg\alpha$

Ejemplo

Calcular la función lineal que tenga: $f_{(1)} = 3$ y además; $f_{(2)} = 2f_{(3)}$



Solución:

$f_{(x)} = mx + b$

$f_{(1)} = m + b = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$

Además:

$2m + b = 2(3m + b)$

$2m + b = 6m + 2b$

$b = -4m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$

De (α) y (β):

$m = -1 \;\wedge\; b = 4$

$\therefore f_{(x)} = -x + 4$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo

Halle el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-4}$$

Solución:

Cuando se pide el dominio, nos preguntamos para que valores de "x" (variable) esta definida lla función f(x).

$\therefore$ $f_{(x)}$ esta definida en R; si $x - 4 \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 4$

$\therefore$ Domf = R – {4}

RANGO DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo

Hallar el rango de la función:

$f(x) = 2x + 5$. Si: $x \in \langle -1; 2]$

Solución: $-1 < x \leq 2$

multiplicando x 2: $-2 < 2x \leq 4$

sumamos 5: $3 < \underbrace{2x + 5} \leq 9$

$3 < f(x) \leq 9$

$\therefore$ Rang(f) = <3, 9]

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

BLOQUE I

2. Hallar el dominio de la función:

$$F_{(x)} = x + 9$$

a) R – {9} b) R – {-9} c) R
d) R – {0} e) R_+

3. Hallar el dominio de la función:

$$F_{(x)} = 3x^2 + 2x + 1$$

a) R – {3} b) R – {2} c) R – {1}
d) R e) R^-

4. Hallar el dominio de la función "f" definida en R por:

$$f_{(x)} = -\frac{x}{2} + 3$$

a) R^+ b) R^- c) R
d) R – {2} e) R – {-2}

5. Hallar el dominio de la función "f" definida por:

$$y = f_{(x)} = x + 5$$

en el conjunto Z.

a) R b) Z c) R – {5}
d) Z – {5} e) Z – {-5}

6. ¿Cuál es el rango de la función:
F = {(1; 3), (2; 5), (1; a - 1), (2; b + 2), (a; b), (2b; a)}?
Señale la suma de sus elementos.

a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 18

7. El dominio de la función: $F_{(x)} = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$

a) [-1; 0] b) [0; 1] c) [0; 2]
d) [-2; 0] e) [-1; 1]

8. Si: $f_{(x)} = x^2 - 4x + 2$ y $x \in \langle -1; 4\rangle$
Hallar el dominio.
a) R b) R+ c) [-1; 4]
d) <-1; +∞> e) <-1; 4>

9. Hallar el rango en: $N_{(x)} = \frac{3x+2}{x+4}$

a) $y \in R - \{4\}$ b) $y \in R - \{-4\}$ c) $y \in R$
d) $y \in R - \{3\}$ e) $y \in R - \{-3\}$

10. Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f_{(x)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

a) R^+ b) R^- c) R
d) R – {1} e) R – {-1}

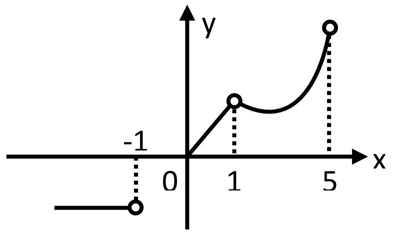
BLOQUE II

5. Hallar el dominio, si:

$$f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

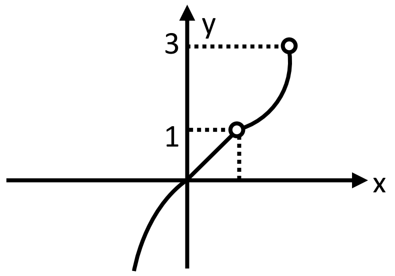
a) <-1; 1>　　b) [-1; 1>　　c) <-1; 1]
d) [-1; 1]　　e) R

6. Sea la función, hallar el dominio de la función:



a) <-∞; 5>　　d) <-∞; -1> ∪ [0; 5>
b) <-∞; 5> - {1}　　e) N.A.
c) <-∞; 1> ∪ [0; 5> - {1}

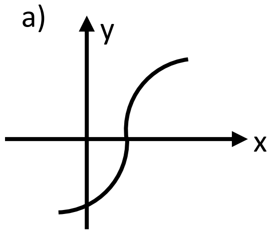
7. Hallar el rango de la siguiente función:

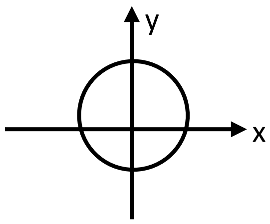


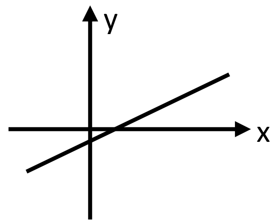
a) <-∞; 3]　　b) <-∞; 0>　　c) <-∞; 3]
d) <-∞; 2]　　e) N.A.

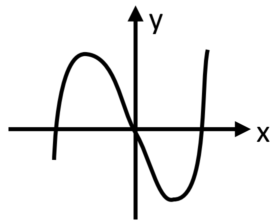
8. Hallar la gráfica de:

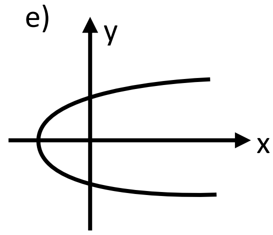
$$y = f(x) = 5x$$

a)


b)


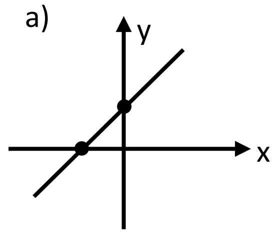
c)


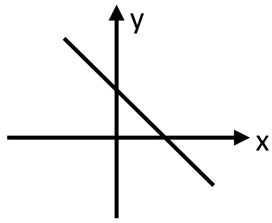
d)


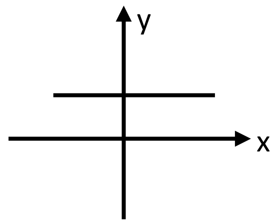
e)


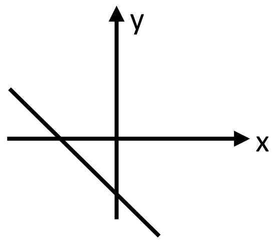
9. Graficar:

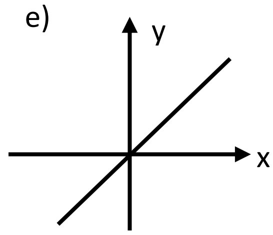
$$y = f(x) = 5x + 1$$

a)


b)


c)


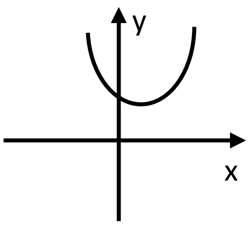
d)


e)


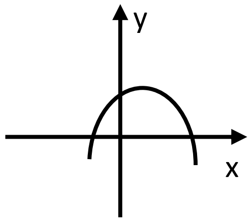
10. Graficar:

$$F(x) = (x + 3)^2 - 5$$

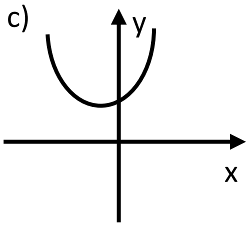
a)



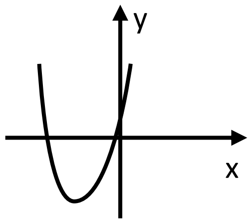
b)



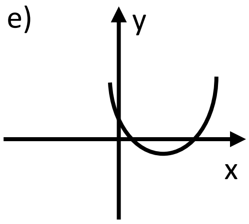
c)



d)



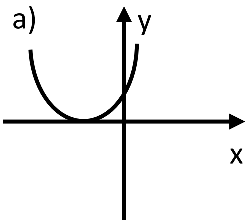
e)



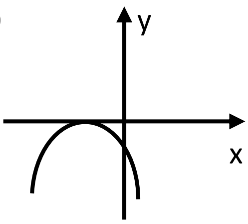
11. Graficar:

$$F(x) = 10x - x^2 - 25$$

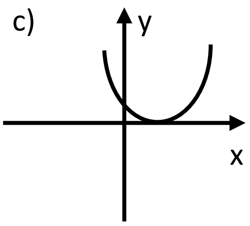
a)



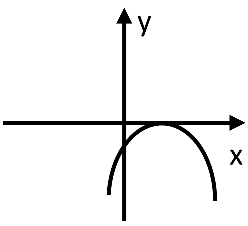
b)



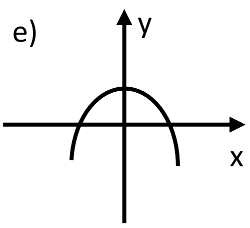
c)



d)



e)



BLOQUE III

5. Hallar el dominio de la función: $f_{(x)} = |x - 2| + 1$

a) R – {1} b) R – {2} c) R – {-1}
d) R – {-2} e) R

6. Hallar el rango de la función:

$$f_{(x)} = -|x + 4|$$

a) [0; 4] b) <-∞; 0] c) R^+
d) R e) <-∞; -1]

7. Hallar el rango de la función:

$$f_{(x)} = 3x^2 + 12x + 20$$

a) [2; +∞> b) [-4; +∞> c) [6; +∞>
d) [8; +∞> e) [10; +∞>

8. Hallar el dominio de la función:

$$f_{(x)} = -2x^2 - 6x + 11$$

a) <-∞; +∞> b) <-∞; 0> c) <0; +∞>
d) R – {2} e) R – {-2}

9. Hallar el rango de la función:

$$f_{(x)} = -4x^2 - 8x - 9$$

a) <-∞; -1] b) <-∞; -2] c) <-∞; -3]
d) <-∞; -4] e) <-∞; -5]

10. Hallar el dominio de la función:

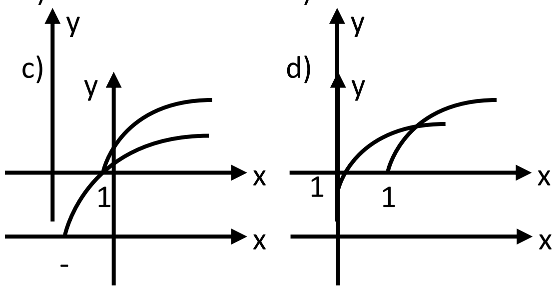
$$f_{(x)} = -3x^2 - 2x + 5; \quad x \in [-2; 3>$$

a) [-2; 3> b) [-2; 2> c) <-2; 3]
d) [0; 3> e) <-1; 6>

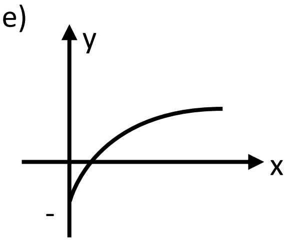
11. Graficar:

$$f_{(x)} = \sqrt{x-1}$$

a) b) c) d)



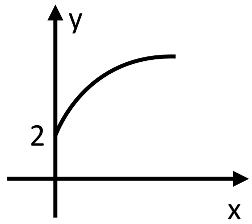
e)



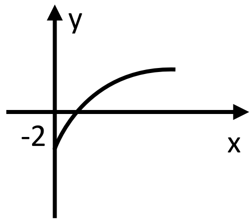
12. Graficar:

$$f_{(x)} = \sqrt{x+2}$$

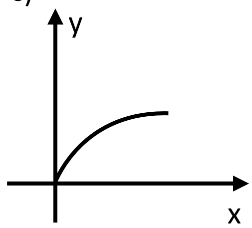
a)



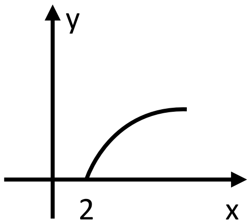
b)



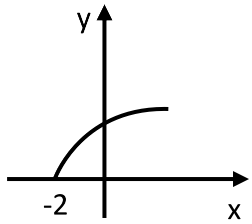
c)



d)



e)



TAREA DOMICILIARIA

1. Hallar el dominio y rango de:

a) f = {(3; 2), (5; 4), (2; 8), (1; 2)}

b) f = {(3; b), (5; 2), (3; m+1), (3; 7)}

c) f = {(5; 4), (5; 4), (3; 1), (3; 1)}

d) f = {(2; 3), (3; 2), (5; 3), (6; 2)}

e) f = {(1; b), (1; m), (2; 1), (1; 2)}

2. Hallar el rango de la función "f" definida en R por:

$$f_{(x)} = 3 - \frac{x}{2}$$

a) R b) R^- c) R^+
d) R – {2} e) R – {-2}

3. Hallar el dominio de la función "f" definida por:

$$y = f_{(x)} = x + 5$$

en el conjunto N.

a) {0; 2; 3; 4; ...} d) {2; 4; 6; ...}
b) {0; 1; 2; 3; ...} e) {3; 5; 7; ...}
c) {2; 3; 4; ...}

4. Reconocer el rango de la función:

$$f = \{(2; a), (2; 3a - 4), (3; a - 1), (4; a^2)\}$$

a) {3; 6; 9} b) {1; 2; 4} c) {0; 2; 4}
d) {3; 5; 7} e) {2; 4; 6}

5. Si: $f_{(x)} = \sqrt{x-2} + x$

Calcular el dominio de dicha función.

a) <2; +∞> b) [-2; 2] c) [-2; +∞>
d) [2; +∞> e) <-∞; 2]

6. Hallar el dominio de una función "f" cuya regla de correspondencia es:

$$f_{(x)} = \sqrt{5-x} + 3\sqrt{x-1}$$

Indicar como respuesta la cantidad de valores que toma "x".

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

7. Hallar el rango en:

$$M_{(x)} = \frac{x+2}{x+8}$$

a) $y \in R - \{8\}$ b) $y \in R - \{-8\}$ c) $y \in R^+$
d) $y \in R^-$ e) $y \in R - \{1\}$

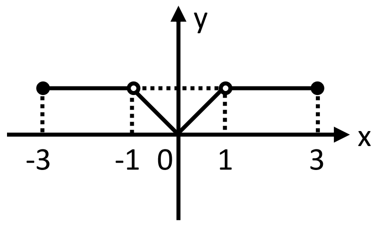
8. Hallar el rango de $f_{(x)}$

Si: x = 2, 3, 4

$f_{(x)} = \frac{x+1}{x-1}$, dar el máximo valor de rango.

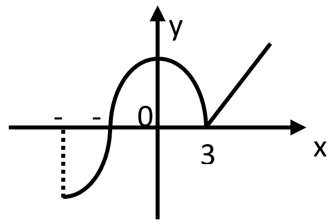
a) 2 b) 3 c)
d) 5/3 e) 5

9. Hallar el rango de la función:



a) [-3; 3]
b) [-1; 1]
c) <-1; 1>
d) [0; 2>
e) N.A.

10. Hallar el dominio de la siguiente función:



a) [-5; 3>
b) [-5; 0>
c) <-5; 0>
d) [5; 0>
e) [-5; ∞>

11. Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f_{(x)} = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$$

a) $x \geq 5$ b) 5 c) $x \leq 5$
d) $x \geq 0$ e) $x \leq 0$

12. Hallar el dominio de la siguiente función:

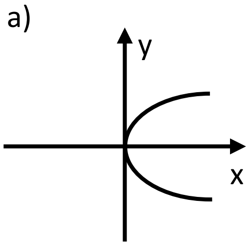
$$f_{(x)} = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

a) <-∞; -2> [1; ∞> b) <-2; 1> c) [-2; 1]

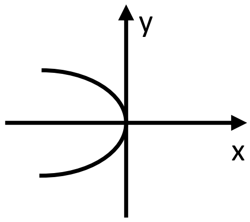
d) [0; ∞> e) <-2; 1> ∪ <3; ∞]

13. Graficar: $F_{(x)} = -x^2$

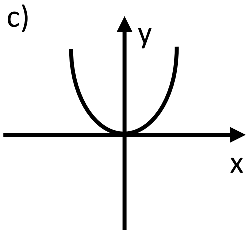
a)



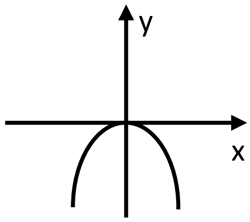
b)



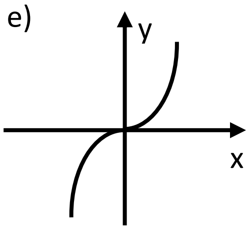
c)



d)

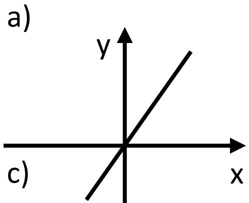


e)

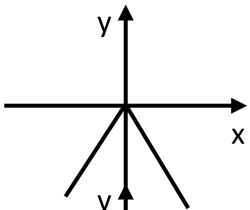


14. Graficar: $F_{(x)} = -|x|$

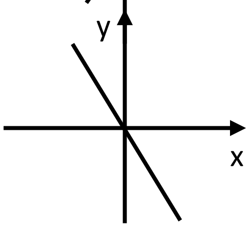
a)



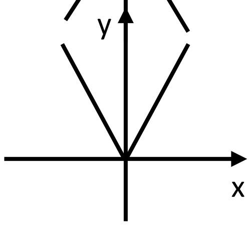
b)



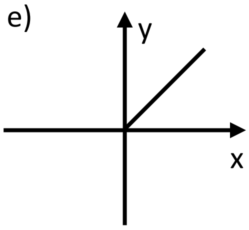
c)



d)

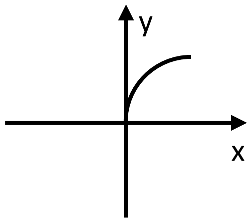


e)

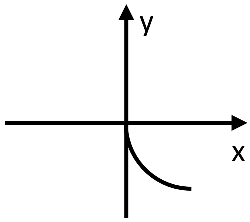


15. Graficar: $F_{(x)} = -\sqrt{x}$

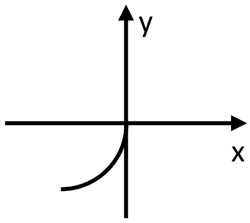
a)



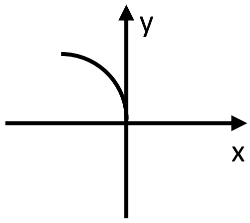
b)



c)



d)



CUADRILÁTEROS

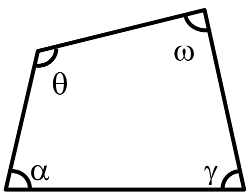
DEFINICIÓN

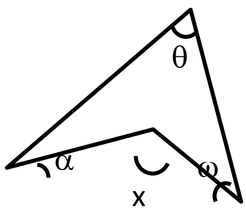
....

....

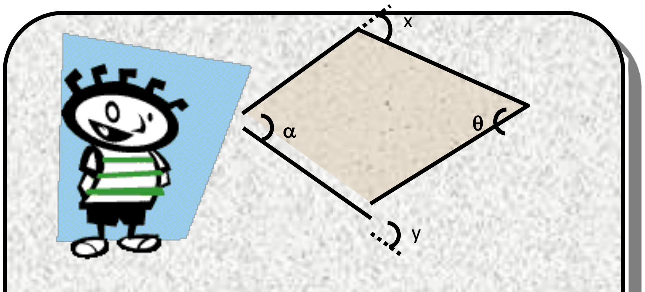
....

CONVEXO **NO CONVEXO**





$\boxed{\alpha + \theta + \omega + \gamma =}$ $\boxed{x = \alpha + \theta + \omega}$

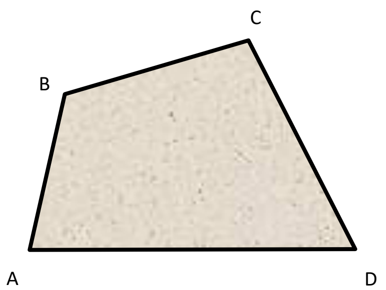


$\boxed{\alpha + \theta = x + y}$

CLASIFICACIÓN

I. Trapezoide

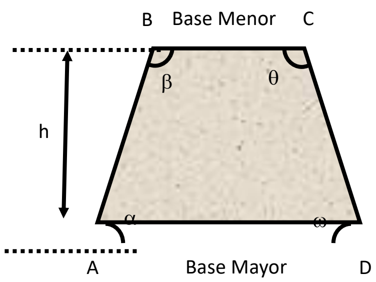
....



II. Trapecio

....

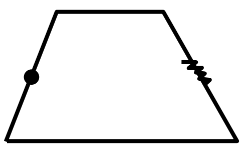
....

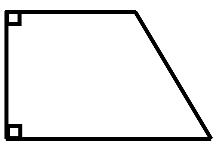


- $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$
- $\alpha + \beta = \theta + \omega = 180º$
- h : altura del trapecio

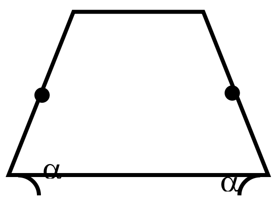
CLASES DE TRAPECIOS

Trapecio Escaleno **Trapecio Rectángulo**





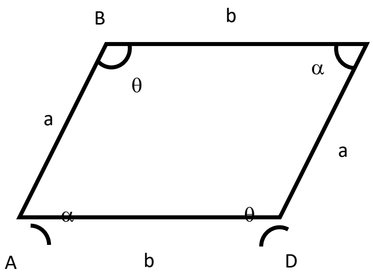
Trapecio Isósceles



III. Paralelogramo

....

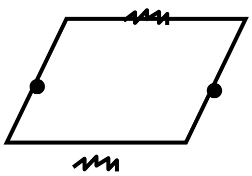
....



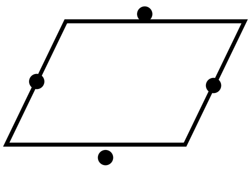
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \wedge \overline{BC} \parallel \overline{AD}$
- $\alpha + \theta = 180º$

CLASES DE PARALELOGRAMOS

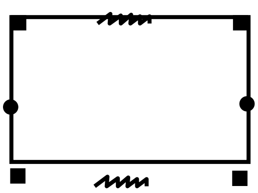
Romboide



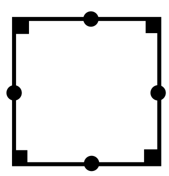
Rombo



Rectángulo



Cuadrado

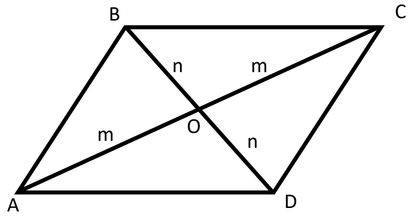


PROPIEDADES

1 ....

....

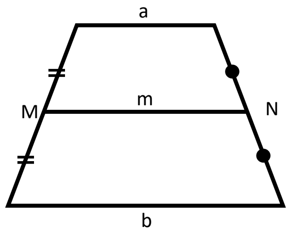
....



2 ....

....

....

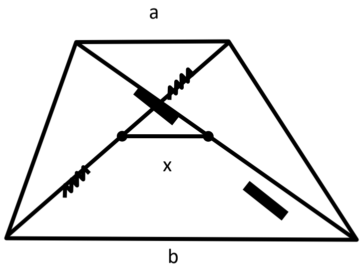


$$\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

3 ....

....

....



$$\boxed{x = \frac{b-a}{2}}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

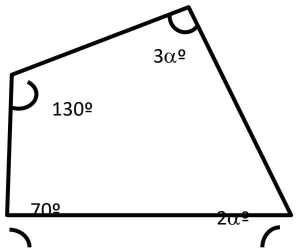
NIVEL I

1. Marcar verdadero (V) o falso (F)

- En el romboide las diagonales son congruentes. ( )
- En el rectángulo las diagonales son perpendiculares. ( )
- En el rombo sus ángulos internos miden 90º ( )

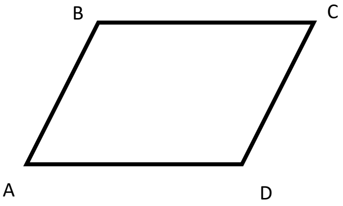
a) FFF b) FFV c) FVV
d) VFF e) VVV

2. Del gráfico, calcular "α"



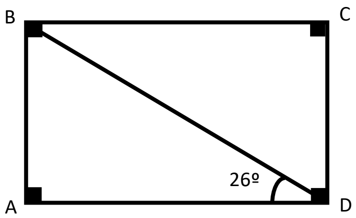
a) 24º
b) 30º
c) 31º
d) 32º
e) 35º

3. En el romboide mostrado, AD = 3(CD) = 18. Hallar EL perímetro ABCD.



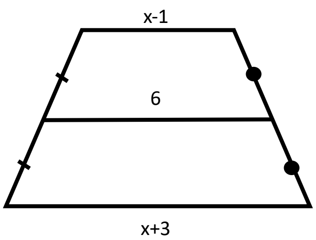
a) 46
b) 52
c) 56
d) 48
e) 42

4. Del gráfico. Hallar la m∢ACD



a) 54º
b) 64º
c) 74º
d) 52º
e) 44º

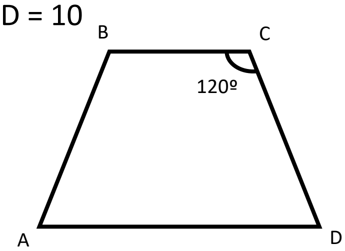
5. ABCD es un trapecio, calcular "x"



a) 4
b) 3
c) 5
d) 6
e) 7

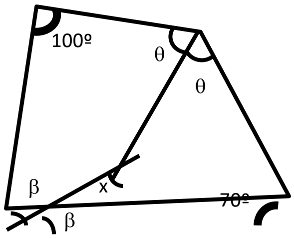
NIVEL II

6. En el trapecio isósceles ABCD, calcular AD, si : BC = CD = 10



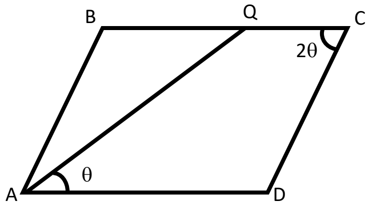
a) 15
b) 25
c) 30
d) 20
e) 35

7. Calcular "x", en el trapezoide mostrado



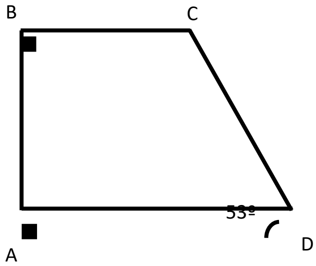
a) 5º
b) 10º
c) 15º
d) 20º
e) 25º

8. ABCD es un paralelogramo, donde CD = 10 y QC = 4. Hallar AD



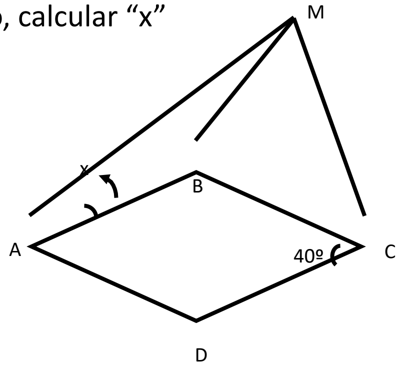
a) 12
b) 10
c) 14
d) 15
e) 13

9. Calcular la mediana del trapecio ABCD si: AB = 8 Y BC = 4



a) 6
b) 5
c) 9
d) 7
e)7,5

10. Si ABCD es un rombo y BMC un triángulo equilátero, calcular "x"



a) 5º
b) 15º
c) 10º
d) 8º
e) 20º

NIVEL III

11. En un trapecio ABCD, la bisectriz interior de C corta a $\overline{AD}$ en "F" tal que ABCF es un paralelogramo, si : BC = 7 y CD = 11. Calcular AD.

a) 9 b) 15,5 c) 12,5
d) 18 e) 16

12. En un trapecio PQRT ($\overline{QR} // \overline{PT}$) se cumple:

$PQ = QR = RT = \frac{PT}{2}$. Calcular la $m\angle QPT$

a) 50º b) 60º c) 45º
d) 30º e) 75º

13. Se tiene un rombo ABCD y se construye exteriormente el cuadrado BEFC, tal que: $m\sphericalangle ECD = 89º$. Calcular la $m\sphericalangle AEC$

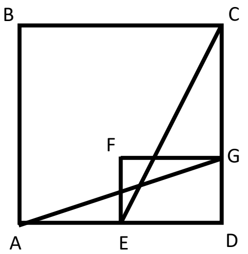
a) 68º b) 56º c) 72º
d) 58º e) 62º

14. En un romboide ABCD; AB = 4 y BC = 10. Luego se trazan las bisectrices interiores de "B" y "C" que cortan a $\overline{AD}$ en "E" y "F" respectivamente. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BE}$ y $\overline{EF}$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 4

15. ABCD y EFGD son cuadrados, CG = 16. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AG}$ y $\overline{CE}$

a) $16\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) $10\sqrt{2}$



TAREA DOMICILIARIA

1. Marcar verdadero (V) o falso (F).

❖ Todo cuadrilátero tiene dos diagonales.
❖ En el trapecio las diagonales se bisecan.
❖ En el rombo las diagonales son perpendiculares y congruentes.

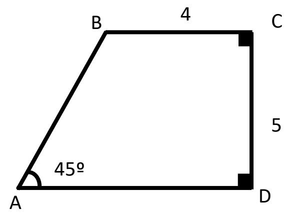
a) VFV b) VVF c) VFF
d) FFF e) FVF

2. En un trapezoide ABCD:
$\frac{m\sphericalangle A}{3} = \frac{m\sphericalangle B}{5} = \frac{m\sphericalangle C}{6} = \frac{m\sphericalangle D}{2}$; Hallar la $m\angle D$

a) 60º b) 30º c) 36º
d) 75º e) 90º

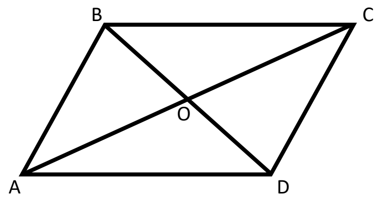
3. Calcular la mediana del trapecio ABCD

a) 6
b) 6,5
c) 7
d) 7,5
e) 8



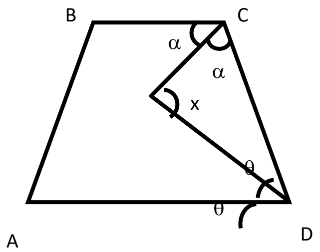
4. Si ABCD es un romboide: AO = 4,5 ; BO = 3
Hallar : (AC + BD)

a) 10
b) 12
c) 15
d) 18
e) 20



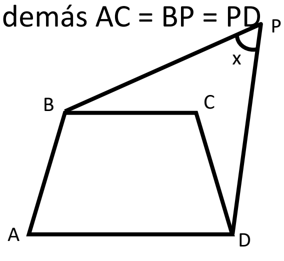
5. En el trapecio mostrado, calcular "x"

a) 60º
b) 100º
c) 90º
d) 120º
e) 80º



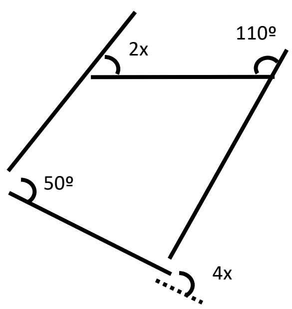
6. Calcular "x", siendo ABCD un trapecio isósceles y además AC = BP = PD

a) 40º
b) 50º
c) 60º
d) 70º
e) 80º



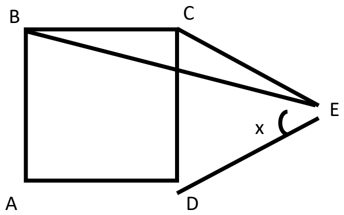
7. Calcular "x"

a) 10º
b) 15º
c) 12º
d) 25º
e) 20º



8. Si ABCD es un cuadrado y CED un triángulo equilátero.

a) 30º
b) 60º
c) 45º
d) 37º
e) 33º

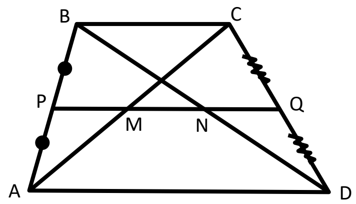


9. En un romboide, las bisectrices interiores de B y C se cortan en un punto de $\overline{AD}$. Calcular el perímetro de ABCD, si BC = K

a) 4k
b) 2k
c) 5k
d) 3k
e) 2,5k

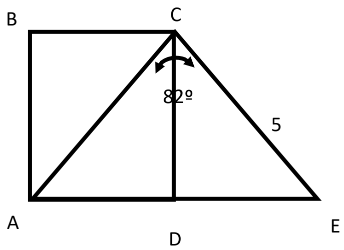
10. En el trapecio ABCD mostrado. Calcular AD; siendo PQ = 17 Y MN = 3

a) 15
b) 14
c) 13
d) 10
e) 20



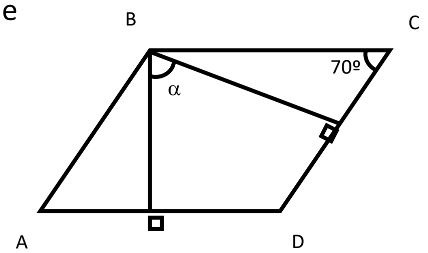
11. Si ABCD es un cuadrado, calcular el perímetro del trapecio ABCE.

a) 20
b) 30
c) 15
d) 12
e) 25



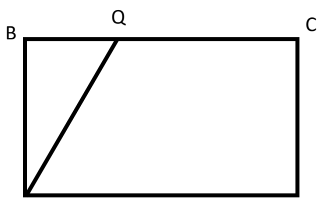
12. Del gráfico, calcular "α" si ABCD es un romboide

a) 60º
b) 65º
c) 75º
d) 70º
e) 80º



13. ABCD es un rectángulo, AB = $4\sqrt{3}$ Y AD = 16. Calcular la mediana del trapecio AQCD

a) 10



b) 15
c) 12
d) 13
e) 14

14. Calcular la base menor de un trapecio sabiendo que la diferencia de la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es 40.

a) 20
b) 30
c) 40
d) 60
e) 80

15. En un paralelogramo ABCD se construyen exteriormente los triángulos equiláteros ABM y BCN. Hallar la m∢MCN.

a) 15º
b) 30º
c) 45º
d) 60º
e) 36º

CICUNFERENCIA I

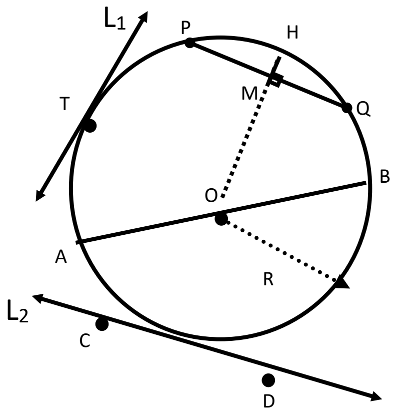
C A D

DEFINICIÓN

....

....

....

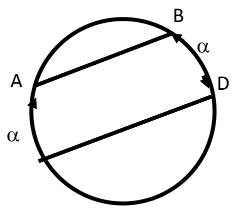


ELEMENTOS:

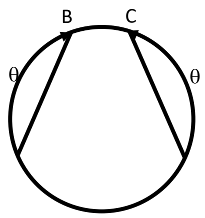
- Centro : "O"
- Radio : "R"
- Cuerda : $\overline{PQ}$
- Arco : $\overset{\frown}{PQ}$
- Diámetro : $\overline{AB}$
- Flecha o Sagita : $\overline{MH}$
- Recta Tangente : $\overleftrightarrow{L_1}$
- Punto de Tangencia : T
- Recta Secante : $\overleftrightarrow{L_2}$

PROPIEDADES GENERALES EN UNA "CIRCUNFERENCIA"

1



2



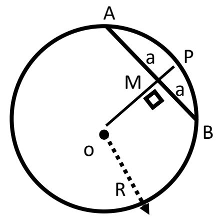
Si: $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

✳ $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

Si : AB = CD

✳ $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

3

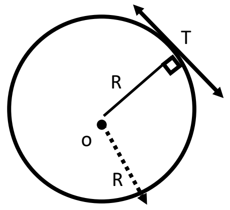


Si : $R \perp \overline{AB}$

✳ AM = MB

($\overline{MP}$: flecha)

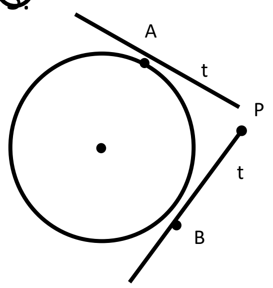
4.



Si : "T" es punto de tangencia

✳ $R \perp L_1$

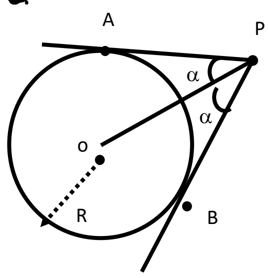
5



Si: A y B son puntos De tangencia

✳ PA = PB

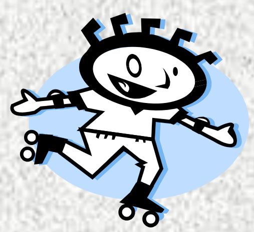
6

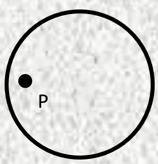


Si: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes

✳ $\overline{PO}$: Bisectriz

NOTA IMPORTANTE





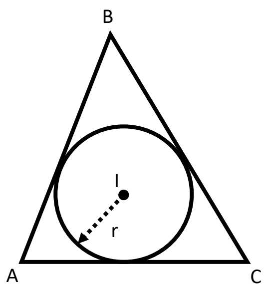
"P" es un punto interior que no pertenece a la circunferencia.

CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN UN TRIÁNGULO

....

....

....



I : Incentro

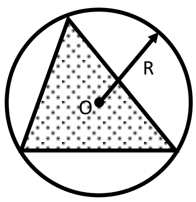
r : Inradio

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

....

....

....



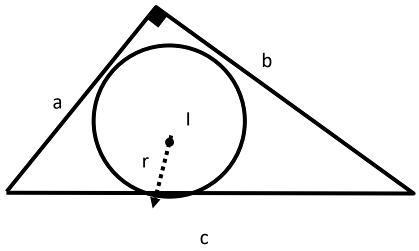
O : Circuncentro

TEOREMA DE PONCELET

....

....

....

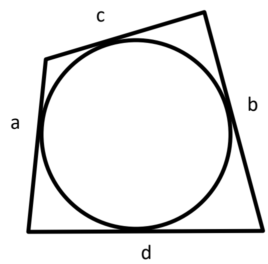


$$a + b = c + 2r$$

TEOREMA DE PITOT

....

....



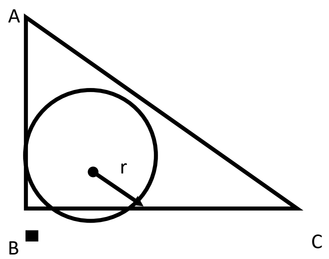
$$a + b = c + d$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

NIVEL I

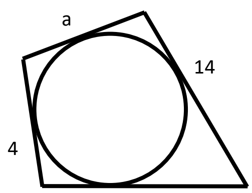
1. Calcular "r", si AB = 5 y BC = 12

   a) 5
   b) 4
   c) 3
   d) 2
   e) 1



2. En la figura mostrada, hallar el valor de a.

   a) 2
   b) 4
   c) 5

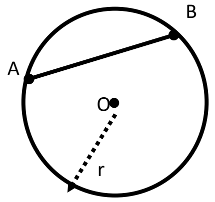


d) 6

e) 8

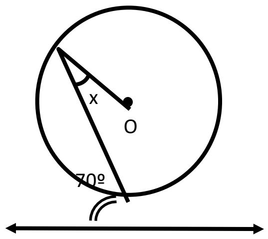
a+8

3. Calcular la longitud de la flecha correspondiente a $\overline{AB}$, si AB = 16 y r = 10



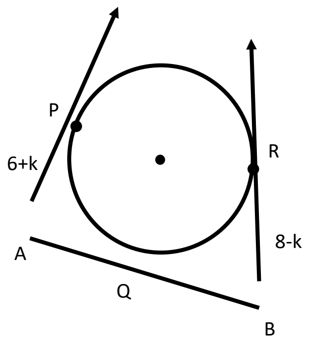
a) 2
b) 4
c) 3
d) 2,5
e) 3,5

4. Siendo "O" centro y "T" punto de tangencia. Calcular "x"



a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 25º
e) 30º

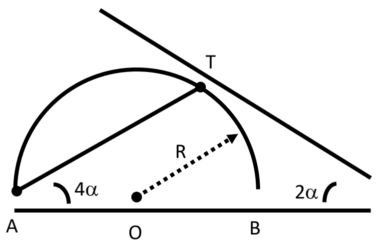
5. Siendo S, Q y R puntos de tangencia. Calcular AB



a) 14
b) 12
c) 2
d) 7
e) 12+k

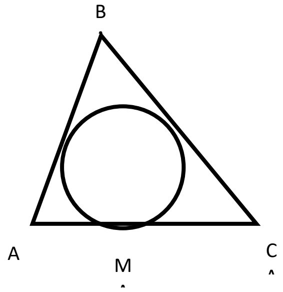
NIVEL II

6. Calcular α, si "T" es punto de tangencia.



a) 9º
b) 20º
c) 30º
d) 12º
e) 18º

7. En el triángulo: AB = 7 , BC = 9 y AC = 8 Calcular AM, (M es punto de tangencia).



a) 1
b) 2
c) 3
d) 2,5
e) 3,5

8. Una circunferencia está inscrita en un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), Si AB = 48, calcular la medida de la mediana del trapecio..

a) 24 b) 36 c) 48
d) 36 e) 72

9. Desde un punto exterior P a una circunferencia, se trazan la tangente $\overline{PT}$, tangente en T y la secante PAB que pasa por el centro de la circunferencia de tal manera que PB = 3(PA).
Hallar la m∢BPT.

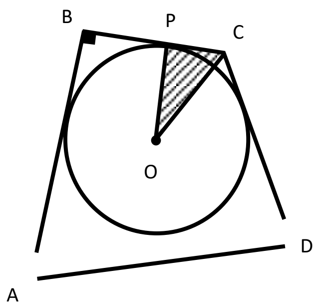
a) 60º b) 45º c) 37º
d) 30º e) $\frac{53°}{2}$

10. Dado un ángulo recto $X\hat{O}Y$, se traza una circunferencia tangente a $\overline{OX}$ y secante a $\overline{OY}$ en "A" y "B". Si OA = 2 y OB = 8. Calcular la distancia del centro de la circunferencia a $\overline{AB}$.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 2,5 e) 3,5

NIVEL III

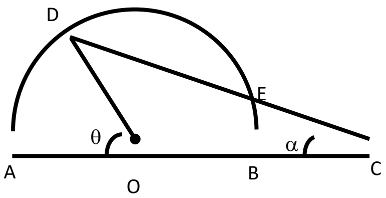
11. Del gráfico, calcular el radio de la circunferencia inscrita en el △OPC. Si : OC = 4; "P" es punto de tangencia y "O" es centro.



a) 1,5
b) 2
c) 1,8
d) 2
e) 1

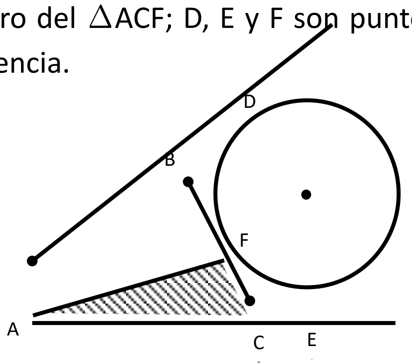
12. Si : AO = EC, Calcular “θ”. (“O” es centro)

a) 2α
b) 3α
c) 4α
d) 6α
e) 7α



13. El perímetro del $\triangle$ABF es 8. Calcular el perímetro del $\triangle$ACF; D, E y F son puntos de tangencia.

a) 4
b) 6
c) 8
d) 5
e) 9



14. El perímetro de un triángulo rectángulo es 56cm. y el radio de la circunferencia inscrita es 3cm. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita.

a) 14cm b) 6 c) 16
d) 12 e) 12,5

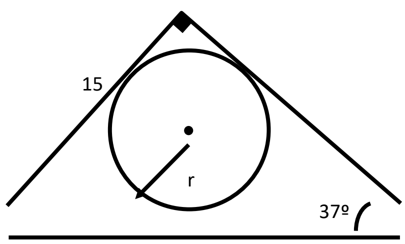
15. En que relación deben estar los radios de dos circunferencias tangentes exteriores para que el ángulo formado por las dos tangentes comunes exteriores mida 60º.

a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) 2 : 3
d) 2 : 5 e) 3 : 5

TAREA DOMICILIARIA

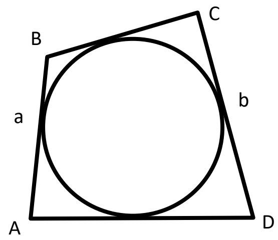
1. Calcular r

a) 4
b) 3
c) 2
d) 5
e) 2,5



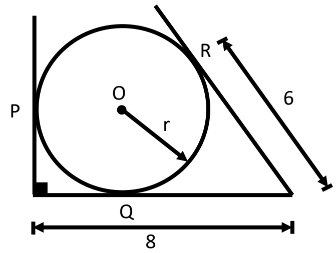
2. Si: a + b = 20, Hallar el perímetro de ABCD.

a) 20
b) 40
c) 60
d) 30
e) 35



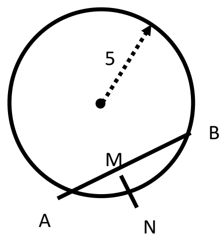
3. Calcular r, si P, Q y R son puntos de tangencia.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6



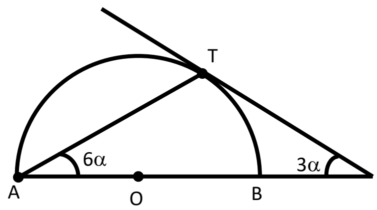
4. Hallar la longitud de la flecha MN, si: AB = 8 y R = 5

a) 1
b) 2
c) 2,5
d) 1,5
e) 3



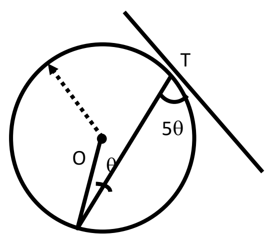
5. Calcular “α” siendo “O” centro y “T” punto de Tangencia.

a) 6º
b) 9º
c) 12º
d) 15º
e) 18º

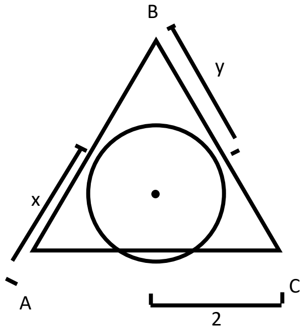


6. Calcular “θ” (T : punto de tangencia).

a) 12º
b) 10º
c) 20º
d) 5º
e) 15º

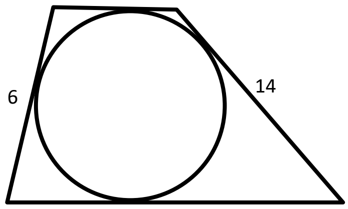


7. En la figura, calcular x + y + z, si: AB = 18, BC = 19 y AC = 17



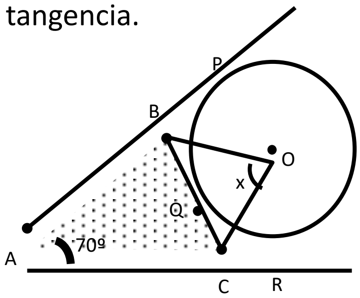
a) 20
b) 27
c) 22
d) 25
e) 30

8. Calcular la longitud de la mediana del trapecio mostrado.



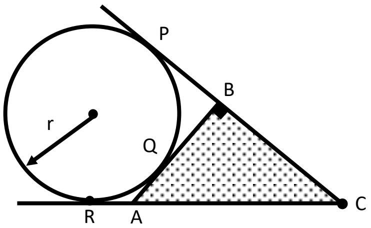
a) 15
b) 20
c) 10
d) 5
e) 12

9. Calcular "x, si "O" es centro y P, Q y R son puntos de tangencia.



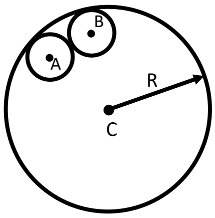
a) 45º
b) 50º
c) 55º
d) 60º
e) 70º

10. Calcular r, si: AB = 5 y BC = 12 (P, Q y R son puntos de tangencia)



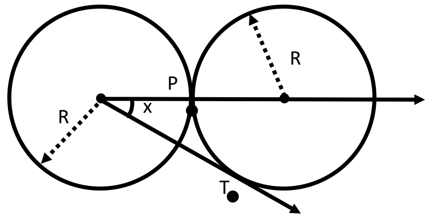
a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) 10

11. Siendo A, B y C los centros de las 3 circunferencias tangentes entre sí, se pide el perímetro del triángulo ABC si R = 2.



a) 12
b) 18
c) 24
d) 20
e) 16

12. Siendo P y T puntos de tangencia. Calcular "x"

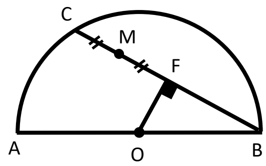


a) 15º
b) 30º
c) 36º
d) 60º
e) 45º

13. Dado un triángulo de lados 8, 15 y 17; hallar el radio de la circunferencia inscrita.

a) 1 b) 2 c) 2,5
d) 3 e) 3,5

14. En el gráfico: CM = MF, OB = OA = 10 y OF = 6. Hallar OM



a) $\sqrt{13}$ d) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{2}$

15. En un triángulo rectángulo ABC los inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC suman 12. Calcular la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa.

a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 16